وزارة التعليم العالي
جامعة البعث
كلية العلوم

الامتحان النهائي
لمقرر تحليل (٢)- السنة الأولى رياضيات
الدورة الإضافية لعام ٢٠١٦-٢٠١٧

الاسم
الدرجة ١٠٠
المدة ساعة ونصف

أجب عن الأسئلة التالية :

السؤال الأول (٤٠درجة) (أ) مستخدماً طريقة المكاملة بالتجزئة أوجد القانون التدريجي المناسب لحساب التكامل الآتي

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n} \quad , n = 1,2,3,\ldots$$

أحسب التكامل :

$$I_3 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$$

(ب) أوجد التكاملين الآتيين :

$$J = \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx \quad , \quad I = \int \frac{x+4}{\sqrt{x^2+x+2}}\,dx$$

السؤال الثاني (٣٤درجة) (أ) أثبت أن :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\,dx = \frac{\pi}{4}$$

(ب) ادرس تقارب أو تباعد التكامل المعتلين الآتيين :

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^{-x})} \quad , \quad \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\ln^2 x}$$

السؤال الثالث (٢٦درجة) : (أ) أوجد مساحة المنطقة المستوية المحدودة بالمنحنيين :

$$y_1 = \sqrt{x} \quad , \quad y_2 = x^2$$

(ب) أحسب المساحة المستوية المحدودة بالمنحني المعطى بالمعادلات الآتية :

$$x = a\cos^3 t \quad , \quad y = a\sin^3 t \quad , \; 0 \le t \le 2\pi \quad , \; a > 0$$

انتهت الأسئلة

حمص في ٦ / ٩ /٢٠١٧ مع أطيب الأمنيات بالتوفيق والنجاح

مدرس المقرر
د. منير مخلوف

جامعة البعث — سلم تصحيح امتحان مقرر تحليل (٢)

كلية العلوم — قسم الرياضيات — السنة الأولى رياضيات

دورة امتحانية لعام $\frac{2016}{2017}$ — الدرجة: 100

جواب السؤال الأول: (أ) لدينا:

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \int \frac{x^2+1-x^2}{(1+x^2)^n}\,dx = I_{n-1} - \int x \frac{x}{(1+x)^n}\,dx$$

40 أربعون

الآن بالنسبة للتكامل الثاني يمكن حسابه بطريقة المكاملة بالتجزئة حيث نفرض أن:

$$x = u \Rightarrow dx = du$$

$$dv = \frac{x}{(1+x^2)^n}\,dx \Rightarrow v = \frac{1}{2(1-n)(x^2+1)^{n-1}} \quad ; \quad n = 2, 3, \ldots$$

وبالتعويض نجد أن:

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^n}\,dx = \frac{x}{2(1-n)(x^2+1)^{n-1}} - \frac{1}{2(1-n)} \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} =$$

$$= \frac{x}{2(1-n)(x^2+1)^{n-1}} - \frac{1}{2(1-n)} I_{n-1}$$

10

فإذن:

$$I_n = I_{n-1} + \frac{x}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)} I_{n-1}$$

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)}\left[2(n-1) I_{n-1} - I_{n-1} + \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}}\right] = \frac{1}{2(n-1)}\left[(2n-3) I_{n-1} + \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}}\right]$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{1}{2(n-1)}\left[(2n-3) I_{n-1} + \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}}\right] \quad ; \quad n = 2, 3, \ldots$$

وبشكل خاص من أجل $n = 1$ لدينا:

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x + C$$

ولحساب التكامل:

$$I_3 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$$

هنا $n = 3$

فإذن:

2

$$I_3 = \frac{1}{4}\left[3 I_2 + \frac{x}{(x^2+1)^2}\right] = \frac{3}{4} I_2 + \frac{x}{4(x^2+1)^2}$$

2

$$I_2 = \frac{1}{2} I_1 + \frac{x}{2(x^2+1)} = \frac{1}{2}\arctan x + \frac{x}{2(x^2+1)} \Rightarrow$$

4

$$I_3 = \frac{3}{8}\arctan x + \frac{3x}{8(x^2+1)} + \frac{x}{4(x^2+1)^2} + C$$

(ب).

2 $I = \int \frac{x+4}{\sqrt{x^2+x+2}}\, dx = A\sqrt{x^2+x+2} + \alpha \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+2}}$

لتعيين كل من A و α نشتق هذه العلاقة فنجد أن :

$\frac{x+4}{\sqrt{x^2+x+2}} = \frac{A(2x+1)}{2\sqrt{x^2+x+2}} + \frac{\alpha}{\sqrt{x^2+x+2}}$

نضرب الطرفين بـ $\sqrt{x^2+x+2}$ ومن ثم نطابق فنحصل على :

4 $A = 1 \;;\; \alpha = \frac{7}{2}$

إذن التكامل يساوي :

$I = \sqrt{x^2+x+2} + \frac{7}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+2}} =$

6 $= \sqrt{x^2+x+2} + \frac{7}{2}\ln\left|x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+2}\right| + c$

لحساب التكامل J نلاحظ أنه يكتب بالصورة :

$J = \int x^{-\frac{1}{2}}\left(1 + x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} dx$

ومنه يكون :

$m = -\frac{1}{2} \;;\; n = \frac{1}{4} \;;\; p = \frac{1}{3} \;,\; \frac{m+1}{n} = 2$

لذلك نفرض أن :

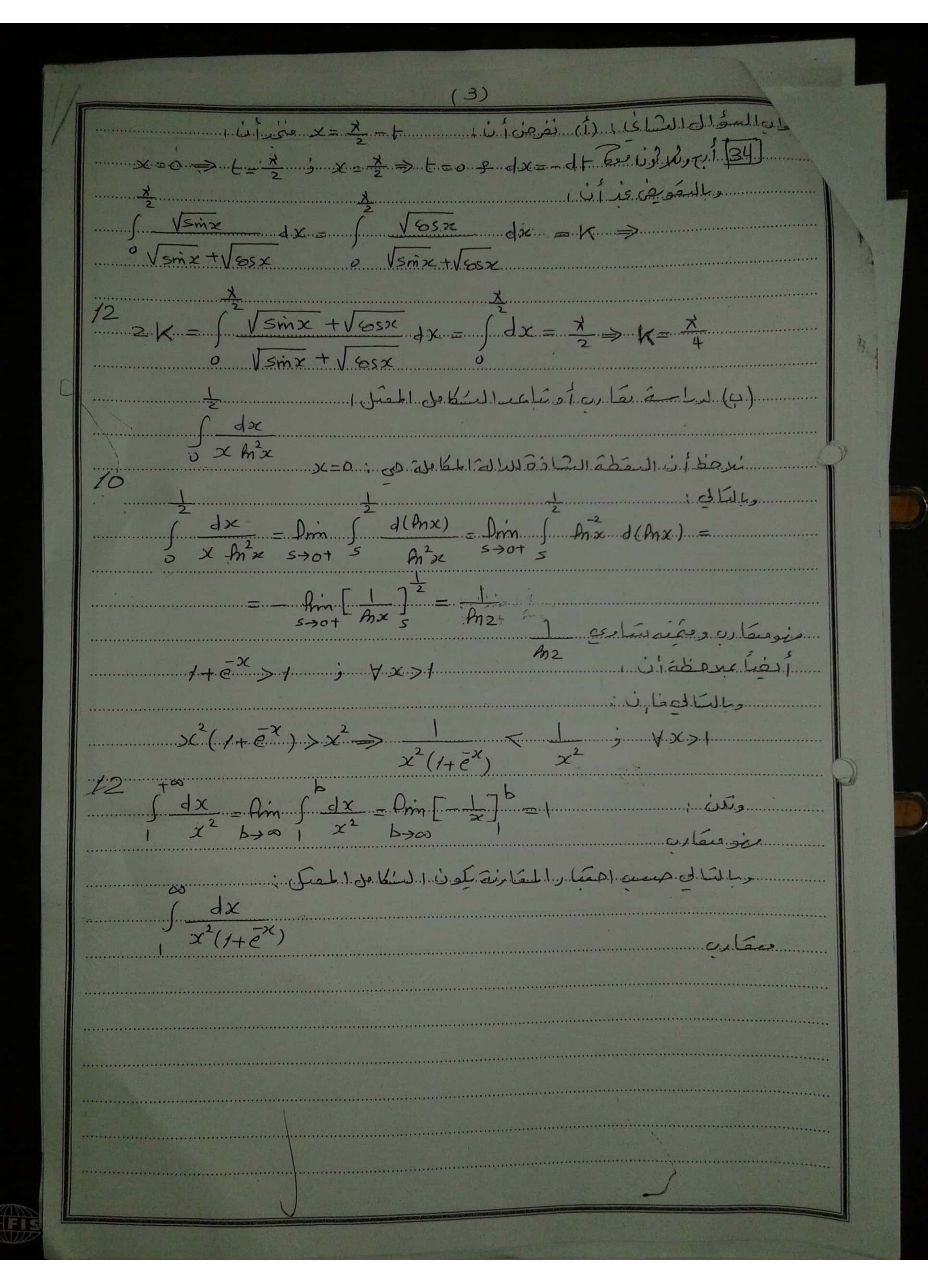
$t = \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}} \Rightarrow x = (t^3-1)^4$

4 $dx = 12t^2(t^3-1)^3\, dt$

الآن بالتعويض في التكامل المفروض نجد أن :

$J = 12\int (t^6 - t^3)\, dt = \frac{3}{7}(4t^3 - 7) + c$

6 $J = \frac{3}{7}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)\left(4\sqrt[4]{x} - 3\right)\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}} + c \;;\; x > 0$



حل السؤال الثاني: (أ) نفرض أن: $x=\frac{\pi}{2}-t$ ، متى أن:

[34] [illegible] $dx=-dt$ و $x=0 \Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$; $x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow t=0$

وبالتعويض نجد أن:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\,dx=K \Rightarrow$$

12

$$2K=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx=\frac{\pi}{2} \Rightarrow K=\frac{\pi}{4}$$

(ب) لدراسة تقارب أو تباعد التكامل المعتل:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\ln^2 x}$$

نلاحظ أن النقطة الشاذة للدالة المكاملة هي: $x=0$

10

وبالتالي:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\ln^2 x}=\lim_{s\to 0^+}\int_s^{\frac{1}{2}} \frac{d(\ln x)}{\ln^2 x}=\lim_{s\to 0^+}\int_s^{\frac{1}{2}} \ln^{-2}x\,d(\ln x)=$$

$$=-\lim_{s\to 0^+}\left[\frac{1}{\ln x}\right]_s^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\ln 2}$$

فهو متقارب ونتيجته تساوي $\frac{1}{\ln 2}$

أيضاً بملاحظة أن: $1+e^{-x}>1 \quad ; \quad \forall x>1$

وبالتالي فإن:

$$x^2(1+e^{-x})>x^2 \Rightarrow \frac{1}{x^2(1+e^{-x})}<\frac{1}{x^2} \quad ; \quad \forall x>1$$

12

ولكن:

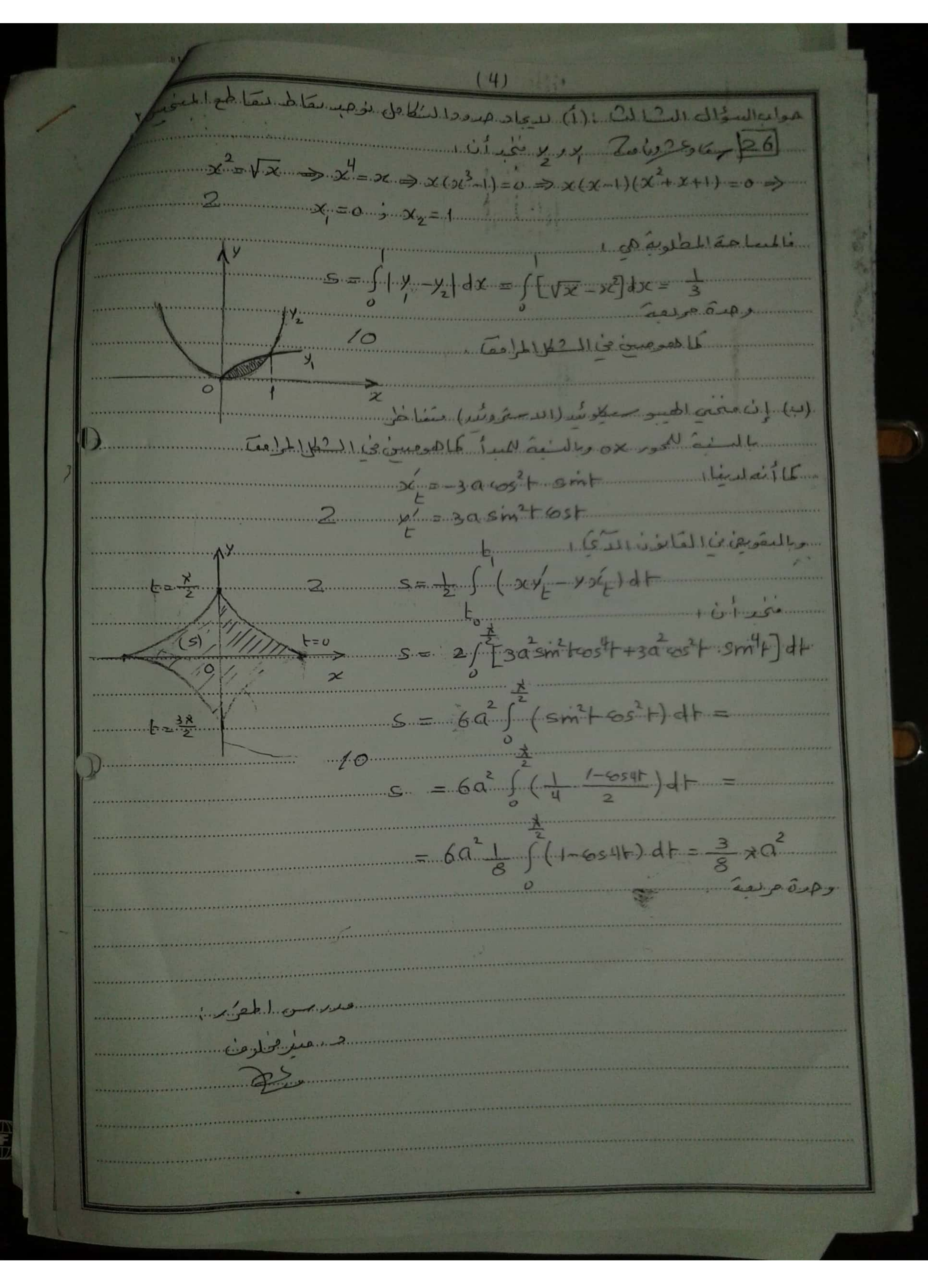
$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^b=1$$

فهو متقارب

وبالتالي حسب اختبار المقارنة يكون التكامل المعتل:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^{-x})}$$

متقارب



جواب السؤال الثالث: (أ) لإيجاد حدود التكامل نوجد نقاط تقاطع المنحنيين y_1 و y_2 فنجد أن:

26 درجة

$$x^2 = \sqrt{x} \Rightarrow x^4 = x \Rightarrow x(x^3-1) = 0 \Rightarrow x(x-1)(x^2+x+1) = 0 \Rightarrow$$

2 $x_1 = 0 \; ; \; x_2 = 1$

فالمساحة المطلوبة هي:

$$S = \int_0^1 |y_1 - y_2|\, dx = \int_0^1 [\sqrt{x} - x^2]\, dx = \frac{1}{3}$$

وحدة مربعة

10 كما هو مبين في الشكل المرافق.

(ب) إن منحني الهيبوسيكلوئيد (الاستروئيد) متناظر بالنسبة للمحور ox وبالنسبة للمبدأ كما هو مبين في الشكل المرافق.

كما أنه لدينا:

$$x'_t = -3a\cos^2 t \sin t$$

2

$$y'_t = 3a\sin^2 t\cos t$$

وبالتعويض في القانون الآتي:

2

$$S = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} (x y'_t - y x'_t)\, dt$$

نجد أن:

$$S = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} [3a^2\sin^2 t\cos^4 t + 3a^2\cos^2 t\sin^4 t]\, dt$$

$$S = 6a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t\cos^2 t)\, dt =$$

10

$$S = 6a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1-\cos 4t}{2}\right) dt =$$

$$= 6a^2\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 4t)\, dt = \frac{3}{8}\pi a^2$$

وحدة مربعة

مدرس المقرر:

د. منير مخلوف

[signature]